

SOLUSI NUMERIK SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR DALAM REAKSI STEAM REFORMING MENGGUNAKAN METODE NEWTON-RHAPSON

[Numerical Solution of Non-Linear Equation System in Steam Reforming Reaction Using NewthoN-Raphson Method]

Azizah Fitrah Kirani^{1)*}, Risnawati Ibtnas²⁾, Ilham Syata³⁾

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar

¹⁾aazizahfk16@gmail.com (corresponding), ²⁾risnawati.ibnas@uin-alauddin.ac.id,
³⁾ilham.syata@uin-alauddin.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian sistem persamaan non linear dari reaksi *Steam Reforming* yang terdiri dari dua persamaan non linear dengan dua variabel yaitu variabel x dan y yang akan dicari menggunakan metode Newton-Raphson. Diperoleh hasil iterasi akhir dengan nilai x adalah 0,7540907920 dan y adalah 0,700893797. Kedua nilai tersebut akan disubstitusi ke dalam rumus fraksi mol untuk mencari komposisi kesetimbangan dari komponen-komponen reaksi *Steam Reforming*. Hasil penelitian setiap komponen senyawa kimia yang sudah dirumuskan kemudian didapatkan nilai fraksi mol untuk setiap komponen senyawa kimia yaitu nilai untuk CO adalah 0,00462, untuk H₂ adalah 0,25745, untuk CO₂ adalah 0,06089, untuk H₂O adalah 0,56875, dan untuk CH₄ adalah 0,10827. Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa metode Newton-Raphson dapat diterapkan untuk menemukan komposisi kesetimbangan komponen-komponen dari reaksi *steam reforming*.

Kata kunci: Metode Newton-Raphson; Reaksi Steam Reforming.

ABSTRACT

This study discusses the solution of a system of non linear equation from the steam reforming reaction which consist of two non-linear equation with two variables, namely the x and y variables which will be solved using the Newton-Raphson method. The results of the final iteration are obtained with a value of x is 0.754090792 and y is 0.700893797. These two values will be substituted into the mole fraction formula to find the equilibrium composition of the steam reforming reaction components. The research results were obtained by formulating the mole fraction of each component of a chemical compound that had been formulated, then the value of the mole fraction for each component of the chemical compound was obtained, the value of the mole fraction for CO = 0.00462, H₂ = 0.25745, CO₂ = 0.06089, H₂O = 0.56875, and CH₄ = 0.10827. Based on the results obtained, it can be concluded that the Newton-Raphson method can be applied to find the equilibrium composition of the components of the steam reforming reaction.

Keywords: Newton-Raphson Method; Steam Reforming Reaction.

PENDAHULUAN

Matematika memiliki peranan penting di berbagai bidang ilmu dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Matematika tidak hanya digunakan dalam ilmu pengetahuan itu sendiri, tetapi juga dapat digunakan dalam menyelesaikan persoalan yang muncul pada bidang lain seperti pada bidang kimia yaitu

persamaan reaksi kimia, dalam bidang fisika yaitu pada persamaan gelombang, bidang ekonomi yaitu persamaan fungsi penawaran, dan sebagainya (Anwar, 2018).

Permasalahan dalam dunia nyata dapat disajikan menjadi lebih sederhana ke dalam bentuk model matematika agar lebih mudah dipahami, dianalisis, dan dipecahkan (Hasanah, 2019). Model matematika dapat berupa persamaan atau sistem persamaan, persamaan dapat dibedakan menjadi persamaan linier dan persamaan non linier. Seringkali model matematika yang muncul bukanlah model biasa melainkan model rumit yang bahkan sulit dicari solusinya (Margarety, 2022). Ini menjelaskan bahwa tidak semua masalah dapat diselesaikan dengan perhitungan biasa. Jika suatu masalah sulit dipecahkan dengan metode analitik, maka metode yang dapat digunakan adalah metode numerik (Hidayati, 2022).

Salah satu penerapan metode numerik pada persamaan non linear yaitu pada reaksi *steam reforming* atau reaksi uap. Reaksi *steam reforming* merupakan salah satu proses pembuatan gas hidrogen dari bahan yang mengandung karbon seperti biomassa dan etanol dengan menggunakan katalis yang selanjutnya bisa digunakan sebagai sumber energi alternatif yang ramah terhadap lingkungan maupun sebagai bahan baku kimia (Mukhtar, 2019). Dalam proses *steam reforming* gas alam melibatkan 2 reaksi, yaitu reaksi steam reforming dan reaksi water-gas shift. Proses konvensional steam reforming gas alam adalah teknologi yang paling mapan dan paling banyak digunakan saat ini (Jatmiko, 2018).

Reaksi kimia *steam reforming* kemudian dapat disederhanakan sehingga membentuk suatu model matematika yang berbentuk sistem persamaan non linear (Rustamaji, 2013). Model matematika reaksi *Steam Reforming* dapat dicari penyelesaiannya dengan menggunakan metode Newton-Raphson (Devrianti, 2019). Metode Newton Raphson merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan non linear secara numerik dengan pendekatan angka tertentu yang hasilnya akan mendekati hasil sebenarnya (Rochmad, 2013). Metode ini tergolong cepat dan akurat dalam menyelesaikan masalah (Rochmad, 2013). Banyak penelitian yang membahas tentang metode Newton-Raphson, beberapa peneliti bahkan meneliti penyelesaian sistem persamaan nonlinear dengan metode Newton-Raphson, didapatkan bahwa semakin kecil nilai error yang diperoleh maka semakin akurat nilai akhirnya (Khutwatun, 2008). Studi lain tentang perbandingan metode Newton Raphson dan metode Secant dalam mencari akar persamaan dalam sistem persamaan non linear menunjukkan bahwa metode Newton lebih cepat dalam mencari nilai akar dibandingkan metode Secant dan nilai akar persamaan yang dicari lebih akurat dengan metode Newton Raphson dibanding metode Secant (Endang, 2020). Penelitian selanjutnya yaitu perbandingan penyelesaian sistem persamaan non linier dengan menggunakan metode Newton Raphson dan metode Jacobian menemukan bahwa metode Newton Raphson memberikan hasil yang lebih cepat dengan iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan metode Jacobian (Nanda, 2013). Selanjutnya penelitian mengenai perbandingan metode Gauss-Siedel dan Metode Newton-Raphson dalam solusi aliran daya menunjukkan metode Newton Raphson lebih cepat menuju konvergen dibandingkan dengan metode Gauss-Seidel dikarenakan metode Newton Raphson menggunakan kuadratis konvergen untuk proses iterasi sehingga memberikan keuntungan untuk masalah konvergensi (Amin, 2011).

Berdasarkan uraian-uraian yang telah dipaparkan, maka dari itu penulis tertarik menyelesaikan penelitian dengan judul “Solusi Numerik Sistem Persamaan Non Linear Dalam Reaksi *Steam Reforming* Menggunakan Metode Newton-Raphson”.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang diterapkan pada penelitian ini adalah kajian pustaka. Kajian pustaka merupakan teknik pengumpulan data dengan melakukan telaah buku, daftar pustaka, catatan dan berbagai laporan yang berkaitan dengan masalah yang akan dipecahkan. Pada penelitian ini, peneliti menggunakan data sekunder berupa studi kepustakaan, jurnal, skripsi, literatur – literatur yang berkaitan dengan permasalahan yang diangkat.

Adapun prosedur penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menginput model reaksi *steam reforming* yang akan diselesaikan
2. Menyederhanakan model kimia reaksi *steam reforming*
3. Mencari solusi numerik model reaksi *steam reforming* menggunakan metode Newton-Raphson dengan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. Menentukan nilai awal untuk masing- masing variabel x dan y

- Menghitung nilai dari fungsi sistem persamaan nonlinear pada persamaan non linear reaksi *steam reforming*.
- Mencari turunan dari fungsi sistem persamaan non linear untuk masing-masing variabel x dan y
- Menghitung turunan dari fungsi yang telah didapat dari langkah di atas dengan menggunakan nilai awal.
- Mencari nilai-nilai deviasi dari masing masing-masing variabel x dan y
- Mencari nilai selesaian yang lebih tepat dari nilai awal, dengan menggunakan persamaan dibawah ini:

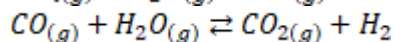
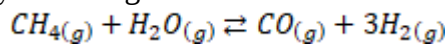
$$Tebakan_{Baru} = Tebakan_{lama} + deviasi$$

- Mengulangi proses iterasi sampai didapatkan nilai deviasi sekecil mungkin atau mendekati nol.
- Interpretasi hasil solusi numerik sistem persamaan non linear dalam reaksi *steam reforming* menggunakan metode Newton-Raphson.
 - Menarik kesimpulan pada solusi numerik sistem persamaan non linear dalam reaksi *steam reformi* menggunakan metode Newton-Raphson.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Reaksi Steam Reforming

Adapun rangkaian reaksi reformasi uap (steam reforming) berlangsung menurut kesetimbangan kimia yaitu sebagai berikut:



Pada suhu 2000 K harga konstanta kesetimbangan untuk masing- masing reaksi adalah $1,875 \times 10^{-4}$ dan 5,965. Kemudian akan ditentukan komposisi kesetimbangan komponen – komponen apabila gas umpan berkomposisi 20% $CH_{4(g)}$ dan 80% $H_2O_{(g)}$ berada pada kondisi suhu 2000 K dan tekanan 1 atm.

Menyederhanakan Model Kimia Reaksi Steam Reforming

Selanjutnya menyederhanakan reaksi Steam Reforming dimana diketahui :

Umpan : 20% CH_4 dan 80% H_2O

Basis perhitungan =10 mol

P =1 atm

x = derajat reaksi pertama

y = derajat reaksi kedua

$$Y = \frac{mol}{mol\ total}$$

Fraksi mol kesetimbangan setiap komponen dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$Y_{CO} = \frac{x - y}{10 + 2x} \quad (1)$$

$$Y_{H_2} = \frac{3x + y}{10 + 2x} \quad (2)$$

$$Y_{CO_2} = \frac{y}{10 + 2x} \quad (3)$$

$$Y_{H_2O} = \frac{8 - x - y}{10 + 2x} \quad (4)$$

$$Y_{CH_4} = \frac{2 - x}{10 + 2x} \quad (5)$$

Persamaan konstanta kesetimbangan dinyatakan sebagai berikut :

$$K_1 = \frac{Y_O Y_{H_2}^3 P^2}{Y_{CH_4} Y_{H_2O}} \quad (6)$$

$$K_2 = \frac{Y_{CO_2} Y_{H_2}}{Y_{CO} Y_{H_2O}} \quad (7)$$

Kemudian

$$K_1 = \frac{(x-y)(3x+y)^3}{(2-x)(8-x-y)(10+2x)^2} \quad (8)$$

$$K_2 = \frac{y(3x+y)}{(x-y)(8-x-y)} \quad (9)$$

Dari penyelesaian di atas, dapat dibentuk sistem persamaan non linear seperti pada persamaan berikut:

$$\frac{(x-y)(3x+y)^3}{(2-x)(8-x-y)(10+2x)^2} = 1,875 \times 10^{-4} \quad (10)$$

$$\frac{y(3x+y)}{(x-y)(8-x-y)} = 5,965 \quad (11)$$

Sistem persamaan non linear di atas kemudian akan diselesaikan menggunakan metode Newton Raphson.

Solusi Numerik

Langkah pertama dari penyelesaian kasus ini adalah dengan menentukan nilai awal. Penentuan nilai awal mempengaruhi jumlah iterasi dan kecepatan konvergensi metode Newton-Raphson. Metode Newton-Raphson sering konvergen dengan cepat, terutama bila iterasi dimulai cukup dekat dengan akar yang diinginkan (Batarius, 2018). Nilai awal yang akan digunakan yaitu:

$$[x_0, y_0] = \{(0,9; 0,78); (0,5; 0,48); (0,8; 0,3) \} \quad (12)$$

Kemudian nilai- nilai di atas dikerjakan menggunakan metode Newton Raphson. Penyelesaian dari kasus tersebut menggunakan prosedur yang sudah diuraikan yaitu:

- 1) Nilai awal $x_0 = 0,9$ dan $y_0 = 0,78$

Langkah 1: Sistem persamaan non linier pada persamaan (10) dan (11) di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$F(x, y) = \frac{(x-y)(3x-y)^3}{(2-x)(8-x-y)(10+2x)^2} - 1,875 \times 10^{-4}$$

$$G(x, y) = \frac{y(3x+y)}{(x-y)(8-x-y)} - 5,965$$

ITERASI 1

Langkah 2: menentukan nilai awal $x_0 = 0,9$ dan $y_0 = 0,78$

Langkah 3: mencari nilai fungsi dari kedua persamaan yaitu :

$$F(0,9; 0,78) = \frac{(x-y)(3x-y)^3}{(2-x)(8-x-y)(10+2x)^2} - 1,875 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(0,9 - 0,78)(3(0,9) - 0,78)^3}{(2 - 0,9)(8 - 0,9 - 0,78)(10 + 2(0,9))^2} - 0,0001875 \\
&= \frac{0,84934656}{967,99648} - 0,0001875 \\
&= 0,000689927 \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(0,9; 0,78) &= \frac{y(3x + y)}{(x - y)(8 - x - y)} - 5,965 \\
&= \frac{0,78 (3(0,9) + 0,78)}{(0,9 - 0,78)(8 - 0,9 - 0,78)} - 5,965 \\
&= \frac{2,7144}{0,7584} - 5,965 \\
&= -2,385886076 \cdot
\end{aligned}$$

Langkah 4 : Mencari nilai turunan fungsi terhadap variabelnya yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{172800x^3 - 259200x^2y + 115200xy^2 - 16000y^3 - 29160x^4 + 17280x^3y}{(2 - x)^2(8 - x - y)^2(10 + 2x)^4} \\
&\quad + \frac{19440x^2y^2 - 14400xy^3 - 12744x^5 + 14364x^4y - 2160x^3y^2 - 1640x^2y^3}{(2 - x)^2(8 - x - y)^2(10 + 2x)^4} \\
&\quad + \frac{2360y^4 + 1728x^5y - 1728x^4y^2 + 320x^2y^4 + 324x^6y - 288x^5y^2 - 24x^4y^3}{(2 - x)^2(8 - x - y)^2(10 + 2x)^4} \\
&\quad + \frac{24x^4y^3 + 24x^4y^3 + 64x^3y^4 + 472xy^4 - 20y^5 - 64xy^5 - 12x^2y^5}{(2 - x)^2(8 - x - y)^2(10 + 2x)^4} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{-86400x^3 + 115200x^2y - 48000xy^2 + 6400y^3 + 24840x^4 - 25920x^3y +}{(2 - x)^2(8 - x - y)^2(10 + 2x)^4} \\
&\quad + \frac{3600x^2y^2 + 2560xy^3 + 12204x^5 - 16992x^4y + 7800x^3y^2 - 1344x^2y^3 -}{(2 - x)^2(8 - x - y)^2(10 + 2x)^4} \\
&\quad + \frac{600y^4 + 60xy^4 + 1152x^4y^2 - 640x^3y^3 + 96x^2y^4 - 324x^7 + 288x^6y + 24x^5y^2 -}{(2 - x)^2(8 - x - y)^2(10 + 2x)^4} \\
&\quad + \frac{64x^4y^3 + 12x^3y^4 - 864x^6}{(2 - x)^2(8 - x - y)^2(10 + 2x)^4} \cdot
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{3x^2y - 32y^2 + 3y^3 + 2xy^2}{(x - y)^2(8 - x - y)^2} \cdot$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{24x^2 + 16xy - 3x^3 - 2x^2y - 8y^2 - 3xy^2}{(x - y)^2(8 - x - y)^2} \cdot$$

Langkah 5: menghitung nilai-nilai fungsi dari turunan yang telah didapat dari langkah 4 diatas dengan menggunakan nilai awal:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{172800(0,9)^3 - 259200(0,9)^2(0,78) + 115200(0,9)(0,78)^2 - 16000(0,78)^3 -}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &\quad \frac{29160(0,9)^4 + 17280(0,9)^3(0,78) + 19440(0,9)^2(0,78)^2 - 14400(0,9)}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &\quad \frac{(0,78)^3 - 12744(0,9)^5 + 14364(0,9)^4(0,78) - 2160(0,9)^3(0,78)^2 - 1640}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &\quad \frac{(0,9)^2(0,78)^3 + 2360(0,78)^4 + 1728(0,9)^5(0,78) - 1728(0,9)^4(0,78)^2 + 320}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &\quad \frac{(0,9)^2(0,78)^4 + 324(0,9)^6(0,78) - 288(0,9)^5(0,78)^2 - 24(0,9)^4(0,78)^3 + 64}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &\quad \frac{(0,9)^3(0,78)^4 + 472(0,9)(0,78)^4 - 20(0,78)^5 - 64(0,9)(0,78)^5 - 12(0,9)^2(0,78)^5}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &= 0,012063897 \cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{-86400(0,9)^3 + 115200(0,9)^2(0,78) - 48000(0,9)(0,78)^2 + 6400(0,78)^3}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &\quad \frac{+24840(0,9)^4 - 25920(0,9)^3(0,78) + 3600(0,9)^2(0,78)^2 + 2560(0,9)}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &\quad \frac{(0,78)^3 + 12204(0,9)^5 - 16992(0,9)^4(0,78) + 7800(0,9)^3(0,78)^2 - 1344}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &\quad \frac{(0,9)^2(0,78)^3 - 600(0,78)^4 + 60(0,9)(0,78)^4 + 1152(0,9)^4(0,78)^2 - 640}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &\quad \frac{(0,9)^3(0,78)^3 + 96(0,9)^2(0,78)^4 - 324(0,9)^7 + 288(0,9)^6(0,78) + 24}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &\quad \frac{(0,9)^5(0,78)^2 - 64(0,9)^4(0,78)^3 + 12(0,9)^3(0,78)^4 - 864(0,9)^6}{(2 - 0,9)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2(10 + 2(0,9))^4} \\ &= -0,008544041 \cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x} &= \frac{3(0,9)^2(0,78) - 32(0,78)^2 + 3(0,78)^3 + 2(0,9)(0,78)^2}{(0,9 - 0,78)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2} \\ &= \frac{-15,054624}{0,57517056} \\ &= -26,17419083 \cdot\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{24(0,9)^2 + 16(0,9)(0,78) - 3(0,9)^3 - 2(0,9)^2(0,78)}{(0,9 - 0,78)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2} \\&= \frac{-8(0,78)^2 - 3(0,9)(0,78)^2}{(0,9 - 0,78)^2(8 - 0,9 - 0,78)^2} \\&= \frac{20,71152}{0,57517056} \\&= 36,00935347.\end{aligned}$$

Langkah 6: mencari nilai-nilai deviasi dari nilai x dan y nilai-nilai deviasi tersebut dimisalkan r_1 dan s_1 .

Untuk mencari nilai-nilai r_1 dan s_1 terlebih dahulu turunan fungsi beserta nilai fungsi sistem persamaan non linear di atas dibentuk menjadi :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F(0,9; 0,78) \\ G(0,9; 0,78) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,012063897 & -0,008544041 \\ -26,17419083 & 36,00935347 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,000689927 \\ -2,385886076 \end{bmatrix}$$

Kemudian perhitungan dilanjutkan dengan mencari matriks A, A_1 , dan A_2 dengan aturan Cramer, adapun hasilnya sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,012063897 & -0,008544041 \\ -26,17419083 & 36,00935347 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -F & \frac{\partial F}{\partial y} \\ -G & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,000689927 & -0,008544041 \\ 2,385886076 & 36,00935347 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & -F \\ \frac{\partial G}{\partial x} & -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,012063897 & -0,000689927 \\ -26,17419083 & 2,385886076 \end{bmatrix}$$

Setelah dimasukkan matriks A, A_1 , dan A_2 dengan aturan Cramer di atas kemudian dilanjutkan dengan mencari determinan matriks-matriks di atas untuk mendapatkan nilai r_1 dan s_1 dengan rumus di bawah ini.

$$r_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{bmatrix} -0,000689927 & -0,008544041 \\ 2,385886076 & 36,00935347 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,012063897 & -0,008544041 \\ -26,17419083 & 36,00935347 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{((-0,000689927 \times 36,00935347) - (2,385886076 \times -0,008544041))}{((0,012063897 \times 36,00935347) - (-26,17419083 \times -0,008544041))}$$

$$= \frac{(-0,024843825) - (-0,020385108)}{(0,434413131) - (0,22363336)}$$

$$= -0,0211534 \cdot$$

$$s_1 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{bmatrix} 0,012063897 & -0,000689927 \\ -26,17419083 & 2,385886076 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,012063897 & -0,008544041 \\ -26,17419083 & 36,00935347 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{(0,012063897 \times 2,385886076) - (-26,17419083 \times (-0,000689927))}{(0,012063897 \times 36,00935347) - (-26,17419083 \times (-0,008544041))}$$

$$= \frac{0,010724803}{0,210779772}$$

$$= 0,0508815 \cdot$$

Langkah 7: Setelah mendapatkan nilai r_1 dan s_1 di atas, akan dicari nilai pendekatan yang lebih tepat dari nilai awal, dengan menggunakan persamaan dibawah ini:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + r_1 \\ &= 0,9 + (-0,0211534) \\ &= 0,878846507 \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + s_1 \\ &= 0,78 + 0,0508815 \\ &= 0,830881516 \cdot \end{aligned}$$

Nilai $x_1 = 0,878846507$ dan $y_1 = 0,830881516$ akan digunakan sebagai nilai untuk langkah berikutnya. Kemudian menggunakan langkah-langkah yang sama untuk iterasi selanjutnya dilanjutkan menggunakan microsoft excel, dapat dilihat pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1 Iterasi Newton Raphson $x_0 = 0,9$ dan $y_0 = 0,78$

Iterasi ke - n	i_n			
	x	y	F	G
0	0,9	0,78	$6,89927 \times 10^{-4}$	$-2,385886076$
1	$8,78846507 \times 10^{-1}$	$8,30881516 \times 10^{-1}$	$1,02136 \times 10^{-4}$	$3,583868045$
2	$7,72937593 \times 10^{-1}$	$7,20883481 \times 10^{-1}$	$1,20636 \times 10^{-5}$	$5,05147957 \times 10^{-1}$
3	$7,5458987 \times 10^{-1}$	$7,0145241 \times 10^{-1}$	$2,01098 \times 10^{-7}$	$1,655566 \times 10^{-2}$
4	$7,54091236 \times 10^{-1}$	$7,00894364 \times 10^{-1}$	$-9,19362 \times 10^{-11}$	$2,33732 \times 10^{-5}$
5	$7,54090792 \times 10^{-1}$	$7,00893797 \times 10^{-1}$	$-5,31639 \times 10^{-16}$	$5,86651 \times 10^{-11}$
6	$7,54090792 \times 10^{-1}$	$7,00893797 \times 10^{-1}$	$-2,71051 \times 10^{-19}$	$9,76996 \times 10^{-15}$
7	$7,54090792 \times 10^{-1}$	$7,00893797 \times 10^{-1}$	0	0

Tabel 1 menunjukkan hasil semua iterasi dari solusi sistem persamaan non linear dengan nilai awal $x_0 = 0,9$ dan $y_0 = 0,78$ dengan iterasi sebanyak tujuh kali dengan solusi akhir yang didapat yaitu untuk $x = 0,754090792$ dan $y = 0,700893797$.

2) Nilai awal $x_0 = 0,5$ dan $y_0 = 0,48$

Untuk penyelesaian nilai awal $x_0 = 0,5$ dan $y_0 = 0,48$, diselesaikan seperti pada langkah-langkah penyelesaian nilai awal $x_0 = 0,9$ dan $y_0 = 0,78$ di atas. Hasil iterasi dari solusi sistem persamaan non linear nilai awal $x_0 = 0,5$ dan $y_0 = 0,48$ dapat dilihat pada Tabel 2 berikut:

Tabel 2 Iterasi Newton Raphson $x_0 = 0,5$ dan $y_0 = 0,48$

Iterasi ke – n	i_n			
	x	y	F	G
0	0,5	0,48	$-1,70842 \times 10^{-4}$	$8,04230769 \times 10^{-1}$
1	1,433054712	1,33314971	$5,119568 \times 10^{-3}$	8,395242794
2	1,161667721	1,054159759	$1,909496 \times 10^{-3}$	1,729853162
3	$9,66951234 \times 10^{-1}$	$8,78123431 \times 10^{-1}$	$6,2431 \times 10^{-4}$	$1,04572733 \times 10^{-1}$
4	$8,44111647 \times 10^{-1}$	$7,78101092 \times 10^{-1}$	$1,66329 \times 10^{-4}$	$1,5339929 \times 10^{-1}$
5	$7,73739246 \times 10^{-1}$	$7,17938062 \times 10^{-1}$	$2,85952 \times 10^{-5}$	$4,2965813 \times 10^{-2}$
6	$7,55176915 \times 10^{-1}$	$7,01842788 \times 10^{-1}$	$1,47087 \times 10^{-6}$	$3,03353 \times 10^{-3}$
7	$7,54094174 \times 10^{-1}$	$7,0089675 \times 10^{-1}$	$4,56882 \times 10^{-9}$	$9,29745 \times 10^{-6}$
8	$7,54090792 \times 10^{-1}$	$7,00893797 \times 10^{-1}$	$4,44747 \times 10^{-14}$	$9,1763 \times 10^{-11}$
9	$7,54090792 \times 10^{-1}$	$7,00893797 \times 10^{-1}$	$-2,71051 \times 10^{-19}$	$9,76996 \times 10^{-15}$
10	$7,54090792 \times 10^{-1}$	$7,00893797 \times 10^{-1}$	0	0

Tabel 2 menunjukkan hasil semua iterasi dari solusi sistem persamaan non linear dengan nilai awal $x_0 = 0,5$ dan $y_0 = 0,48$ dengan iterasi sebanyak sepuluh kali dengan solusi akhir yang didapat yaitu untuk $x = 0,754090792$ dan $y = 0,700893797$.

3) Nilai awal $x_0 = 0,8$ dan $y_0 = 0,3$

Untuk penyelesaian nilai awal $x_0 = 0,8$ dan $y_0 = 0,3$, diselesaikan seperti pada langkah-langkah penyelesaian nilai awal $x_0 = 0,9$ dan $y_0 = 0,78$ di atas. Hasil iterasi dari solusi sistem persamaan non linear nilai awal $x_0 = 0,8$ dan $y_0 = 0,3$ dapat dilihat pada Tabel 3 berikut:

Tabel 3 Iterasi Newton Raphson $x_0 = 0,8$ dan $y_0 = 0,3$

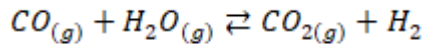
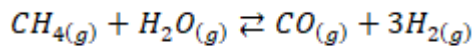
Iterasi ke – n	i_n			
	x	y	F	G
0	0,8	0,3	0,003968558	-5,730217
1	2,76076612	4,722439137	0,934113163	-66,54416
2	2,535164999	4,433691803	0,483186428	-33,23135
3	3,341622607	0,939380607	-1,297498747	-4,812136
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
14	$7,54236648 \times 10^{-1}$	$7,01021235 \times 10^{-1}$	$1,97 \times 10^{-7}$	$4,05992 \times 10^{-4}$
15	$7,54090853 \times 10^{-1}$	$7,0089385 \times 10^{-1}$	$8,26072 \times 10^{-11}$	$1,69246 \times 10^{-7}$
16	$7,54090792 \times 10^{-1}$	$7,00893797 \times 10^{-1}$	$1,46638 \times 10^{-17}$	$3,10862 \times 10^{-14}$
17	$7,54090792 \times 10^{-1}$	$7,00893797 \times 10^{-1}$	0	0

Tabel 3 menunjukkan hasil semua iterasi dari solusi sistem persamaan non linear dengan nilai awal $x_0 = 0,8$ dan $y_0 = 0,3$ dengan iterasi sebanyak delapan belas kali dengan solusi akhir yang didapat yaitu untuk $x = 0,754090792$ dan $y = 0,700893797$.

Interpretasi Hasil

Pada Tabel (1), (2), dan (3) diketahui bahwa dengan nilai awal $x_0 = 0,9$; $0,5$; $0,8$ dan $y_0 = 0,78$; $0,48$; $0,3$ telah didapatkan hasil perhitungan persamaan non linier reaksi *steam reforming* menggunakan metode Newton-Raphson dan diperoleh hasil iterasi akhir dengan nilai $x = 0,754090792$ dan $y = 0,700893797$. Nilai tersebut akan digunakan untuk menyelesaikan kasus reaksi *Steam Reforming*.

Berdasarkan pembahasan di atas pada kasus rangkaian reaksi reformasi uap (*steam reforming*) berlangsung menurut kesetimbangan kimia yaitu sebagai berikut:



Pada suhu 2000 K harga konstanta kesetimbangan untuk masing- masing reaksi adalah $1,875 \times 10^{-4}$ dan 5,965. Tentukan komposisi kesetimbangan komponen-komponen apabila gas umpan berkomposisi 20% $CH_{4(g)}$ dan 80% $H_2O_{(g)}$ berada pada kondisi suhu 2000 K dan tekanan 1 atm. Dengan basis 10 mol dan x adalah derajat reaksi pertama dan y adalah derajat reaksi kedua.

Dengan menggunakan metode Newton-Raphson didapatkan bahwa untuk nilai derajat pertama (x) adalah 0,754 dan nilai derajat kedua (y) adalah 0,7008. Ketiga nilai awal tersebut mendapatkan hasil yang sama tetapi memiliki jumlah iterasi yang berbeda. Hal ini dikarenakan penentuan nilai awal mempengaruhi jumlah iterasi dan kecepatan konvergensi pada metode Newton-Raphson. Jika nilai awal yang digunakan dekat dengan solusi analitiknya maka hasilnya akan cepat konvergen.

Dari hasil nilai derajat pertama (x) dan nilai derajat kedua (y) yang sudah ditentukan, maka dapat menentukan fraksi mol pada kesetimbangan persamaan tersebut. Dengan perumusan fraksi mol pada setiap komponen senyawa kimia yang sudah dirumuskan, didapatkan nilai fraksi mol untuk setiap komponen senyawa kimia yaitu pada persamaan (1), (2), (3), (4), dan (5) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Y_{CO} &= \frac{x - y}{10 + 2x} \\ &= \frac{0,754 - 0,7008}{10 + 2(0,754)} \\ &= 0,00462 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{H_2} &= \frac{3x + y}{10 + 2x} \\ &= \frac{3(0,754) + 0,7008}{10 + 2(0,754)} \\ &= 0,25745 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{CO_2} &= \frac{y}{10 + 2x} \\ &= \frac{0,7008}{10 + 2(0,754)} \\ &= 0,06089 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{H_2O} &= \frac{8 - x - y}{10 + 2x} \\ &= \frac{8 - 0,754 - 0,7008}{10 + 2(0,754)} \\ &= 0,56875 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{CH_4} &= \frac{2 - x}{10 + 2x} \\ &= \frac{2 - 0,754}{10 + 2(0,754)} \\ &= 0,10827 \end{aligned}$$

Dari penyelesaian di atas didapatkan fraksi mol untuk CO adalah **0,00462**, untuk H_2 adalah **0,25745**, untuk CO_2 adalah **0,06089**, untuk fraksi mol H_2O adalah **0,56875**, dan untuk fraksi mol CH_4 adalah **0,10827**. Fraksi mol berguna untuk mengetahui hasil konsentrasi zat yang dihasilkan dan derajat reaksi berfungsi untuk menentukan laju reaksi. Kontribusi matematika dalam penyelesaian kasus ini adalah penentuan derajat reaksi dan juga fraksi mol disetiap zat yang dihasilkan.

Analisis Galat

Berdasarkan hasil perhitungan yang dilakukan dari metode Newton-Raphson, dapat digunakan rumus galat $|\varepsilon| = |a - \hat{a}|$ untuk menentukan galat (*error*). Keudian menghitung galat maksimum dengan menggunakan rumus $\varepsilon = \max (abs(x_n - x_{n-1}), abs(y_n - y_{n-1}))$ sehingga diperoleh galat untuk metode Newton-Raphson sebagai berikut:

Tabel 4. Galat iterasi nilai awal $x_0 = 0,9$ dan $y_0 = 0,78$

Iterasi	$ x_n - x_{n-1} $	$ y_n - y_{n-1} $	Galat
1	$2,1153493 \times 10^{-2}$	$5,0881516 \times 10^{-2}$	$5,0881516 \times 10^{-2}$
2	105908913×10^{-1}	$1,09998036 \times 10^{-1}$	$1,09998036 \times 10^{-1}$
3	$1,8347723 \times 10^{-2}$	$1,9431071 \times 10^{-2}$	$1,9431071 \times 10^{-2}$
4	$4,98634 \times 10^{-4}$	$5,5804610^{-4}$	$5,5804610^{-4}$
5	$4,43656 \times 10^{-7}$	$5,66799 \times 10^{-7}$	$5,66799 \times 10^{-7}$
6	$9,04154 \times 10^{-13}$	$1,24439 \times 10^{-12}$	$9,04154 \times 10^{-13}$
7	$2,35587 \times 10^{-17}$	$9,91205 \times 10^{-17}$	$9,91205 \times 10^{-17}$
8	0	0	0

Berdasarkan Tabel 4 dapat dilihat bahwa dengan nilai awal $x_0 = 0,9$ dan $y_0 = 0,78$ diperoleh nilai galat untuk setiap variabel semakin kecil atau mendekati 0 pada iterasi ke-8 sehingga menghasilkan penyelesaian yang konvergen.

Tabel 5. Galat iterasi nilai awal $x_0 = 0,5$ dan $y_0 = 0,48$

Iterasi	$ x_n - x_{n-1} $	$ y_n - y_{n-1} $	Galat
1	$9,33054712 \times 10^{-1}$	$8,5314971 \times 10^{-1}$	$9,33054712 \times 10^{-1}$
2	$2,71386991 \times 10^{-1}$	$2,78989951 \times 10^{-1}$	$2,78989951 \times 10^{-1}$
3	$1,94716488 \times 10^{-1}$	$1,76036328 \times 10^{-1}$	$1,94716488 \times 10^{-1}$
4	$1,22839587 \times 10^{-1}$	$1,00022338 \times 10^{-1}$	$1,22839587 \times 10^{-1}$
5	$7,0372401 \times 10^{-2}$	$6,016303 \times 10^{-2}$	$7,0372401 \times 10^{-2}$
6	$1,8562331 \times 10^{-2}$	$1,6095274 \times 10^{-2}$	$1,8562331 \times 10^{-2}$
7	$1,082742 \times 10^{-3}$	$9,46037 \times 10^{-4}$	$1,082742 \times 10^{-3}$
8	$3,38147 \times 10^{-6}$	$2,95358 \times 10^{-6}$	$3,38147 \times 10^{-6}$
9	$3,29446 \times 10^{-11}$	$2,87853 \times 10^{-11}$	$3,29446 \times 10^{-11}$
10	0	0	0

Berdasarkan Tabel 5 dapat dilihat bahwa dengan nilai awal $x_0 = 0,5$ dan $y_0 = 0,48$ diperoleh nilai galat untuk setiap variabel semakin kecil atau mendekati 0 pada iterasi ke-10 sehingga menghasilkan penyelesaian yang konvergen.

Tabel 6. Galat iterasi nilai awal $x_0 = 0,8$ dan $y_0 = 0,3$

<i>iterasi</i>	$ x_n - x_{n-1} $	$ y_n - y_{n-1} $	<i>Galat</i>
1	1,96076612	4,42243914	4,42243914
2	$2,25601121 \times 10^{-1}$	$2,887473 \times 10^{-1}$	$2,887473 \times 10^{-1}$
3	$8,06457608 \times 10^{-1}$	3,4943112	3,4943112
4	$1,14370936 \times 10^{-1}$	2,25956133	2,25956133
5	$5,80886397 \times 10^{-1}$	$5,282765 \times 10^{-1}$	$5,80886397 \times 10^{-1}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	$1,45795 \times 10^{-4}$	$1,274 \times 10^{-4}$	$1,45795 \times 10^{-4}$
15	$6,11652 \times 10^{-8}$	$5,343 \times 10^{-8}$	$6,11652 \times 10^{-8}$
16	$1,08803 \times 10^{-14}$	$9,513 \times 10^{-15}$	$1,08803 \times 10^{-14}$
17	0	0	0

Berdasarkan Tabel 6 dapat dilihat bahwa dengan nilai awal $x_0 = 0,8$ dan $y_0 = 0,3$ diperoleh nilai galat untuk setiap variabel semakin kecil atau mendekati 0 pada iterasi ke-17 sehingga menghasilkan penyelesaian yang konvergen.

PENUTUP

Simpulan

Hasil dari perhitungan Newton-Raphson dari kasus kimia reaksi *steam reforming* dengan nilai awal yang digunakan yaitu (0,9; 0,78); (0,5; 0,48); (0,8; 0,3) ditemukan hasil derajat reaksi pertama (x) yaitu 0,754090792 dan derajat reaksi kedua (y) yaitu 0,700893797. Hasil ini didapatkan dari proses perhitungan menggunakan Metode Newton-raphson.

Dari perumusan fraksi mol pada setiap komponen senyawa kimia yang sudah dirumuskan, didapatkan nilai fraksi mol untuk setiap komponen senyawa kimia reaksi *steam reforming* yaitu fraksi mol untuk CO adalah 0,00462, untuk H₂ adalah 0,25745, untuk CO₂ adalah 0,06089, untuk H₂O adalah 0,56875, dan untuk CH₄ adalah 0,10827. Metode Metode Newton–Raphson adalah metode numerik yang dapat menyelesaikan persamaan non linier yang sulit untuk diselesaikan dengan metode analitik dan dapat diterapkan dalam bidang kimia. Jadi, dapat disimpulkan bahwa metode Newton-Raphson dapat diterapkan untuk menemukan komposisi kesetimbangan komponen-komponen dari reaksi *steam reforming*.

Saran

Dari hasil penelitian ini terbukti bahwa metode Newton-Raphson mampu menyelesaikan masalah persamaan non linier yang rumit. Namun dalam proses pengerjaan menggunakan metode ini harus disertai dengan ketelitian agar mendapatkan hasil yang tepat. Serta pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat memperluas studi kasus pada bidang ilmu lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Anwar, N. T. (2018). *Peran kemampuan literasi matematis pada pembelajaran matematika abad-21*. Prisma, 1, 364-370.
- Batarius, Patrisius. (2018). *Nilai Awal Pada Metode Newton-Raphson Yang Dimodifikasi Dalam Penentuan Akar Persamaan*. Jurnal Teknik Informaika, Volume 1, No. 3.
- Devrianti, Mariatul, dkk. (2019). *Analisis Metode Newton-Raphson Ganda Orde Konvergensi Empat Dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinear*. Buletin ilmiah Math. Stat. dan Terapannya, Volume 08, No. 2
- Hasanah, Kurniawati. (2019). “Matematika Ekonomi dan Bisnis”. Jawa Timur:UNIPMA Press.
- Hidayati, T., Aedi, W. G., & Masitoh, L. F. (2022). “Metode Numerik”. Tangerang:UNPAM Press.

- Jatmiko, Tri Hadi, dkk. (2018). *Analisis Kinerja Reaktor Unggun Tetap Untuk Produksi Hidrogen Melalui Reaksi Steam Reforming Etanol*. Jurnal Riset Teknologi Industri, Vol. 12 No. 1.
- Margaretty, Maria. (2022). *Persamaan Non Linier Dan Penerapannya Pada Matematika Bisnis*. Jurnal Dunia Ilmu, 2(3).
- Mukhtar, Anas, dkk. (2019). *Pengaruh Penggunaan Katalis Kalium Hidroksida Pada Campuran Minyak Nabati dan Air Terhadap Produksi Hidrogen Dengan Menggunakan Metode Steam Reforming*. Jurnal Rekayasa Mesin: Universitas Brawijaya, v. 10, n. 2.
- Munir, R. (2010). *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Rochmad. (2013). *Aplikasi Metode Newton-Raphson Untuk Menghampiri Solusi Persamaan Non Linear*. Jurnal MIPA: Universitas Negeri Semarang.
- Rustamaji, Heri. (2013). *Pengantar Komputasi Teknik Kimia Dengan Matlab dan Simulink*. Bandar Lampung: CV. Anugrah Utama Raharja.