Diterima : 13 Desember 2025
Disetujui : 02 Januari 2026
Hal : 63-68

Al-Aqlu: Jurnal Matematika, Teknik dan Sains
https://jurnal.yalamqa.com/index.php/aqlu
e-ISSN: 2985-4369
Vol. 4, No. 1, Januari 2026

ANALISIS INTEGRAL FRAKSIONAL FUNGSI HIPERBOLIK: KASUS TANGEN DAN COTANGEN

[Fractional Integral Analysis of Hyperbolic Function: The Case of Tangent and Cotangent]

Syifaul Janan[1)]*, Andro Kurniawan[2)]

[1)]Program Studi Teknik Mesin, Universitas Pembangunan Nasional Veteran Jakarta
[2)]Program Studi Matematika, Institut Teknologi Batam

[1)]syifaul.janan@upnvj.ac.id (corresponding), [2)]andro@iteba.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini mengkaji integral fraksional Riemann-Liouville untuk fungsi tangen dan cotangen hiperbolik dengan orde $0 < \alpha \leq 1$ menggunakan metode pembagian deret Maclaurin dan teorema integral fraksional fungsi kuasa. Hasil menunjukkan integral fraksional tangen hiperbolik dinyatakan sebagai deret pangkat fraksional dengan koefisien fungsi gamma, sedangkan cotangen hiperbolik memiliki suku singular t^{-1}. Visualisasi MATLAB menunjukkan variasi α menghasilkan karakteristik pertumbuhan berbeda. Tangen hiperbolik bersifat reguler dengan simetri fungsi ganjil, sedangkan cotangen hiperbolik singular di sekitar origin. Penelitian ini memberikan formula eksplisit untuk aplikasi kalkulus fraksional.

Kata kunci: *integral fraksional; Riemann-Liouville; tangen hiperbolik; cotangen hiperbolik; deret Maclaurin*

ABSTRACT

This study examines the Riemann-Liouville fractional integral for hyperbolic tangent and cotangent functions with order $0 < \alpha \leq 1$ *using Maclaurin series division method and power function fractional integral theorem. Results show the fractional integral of hyperbolic tangent is expressed as a fractional power series with gamma function coefficients, while hyperbolic cotangent has a singular term* t^{-1}. *MATLAB visualization shows α variations produce different growth characteristics. Hyperbolic tangent is regular with odd function symmetry, while hyperbolic cotangent is singular around the origin. This research provides explicit formulas for fractional calculus applications.*

Keywords: *fractional integral; Riemann-Liouville; hyperbolic tangent, hyperbolic cotangent;Maclaurin series*

PENDAHULUAN

Kalkulus merupakan fondasi penting dalam matematika modern yang telah memberikan sumbangsih signifikan terhadap kemajuan sains dan teknologi. Salah satu operasi fundamental dalam kalkulus adalah integral, yang secara historis dikembangkan untuk menyelesaikan permasalahan geometris seperti penentuan luas daerah dan volume benda. Dalam perkembangannya, aplikasi integral telah meluas ke berbagai domain keilmuan yang mencakup fisika untuk analisis sistem dinamik, teknik dalam perhitungan struktur dan material, serta ekonomi untuk pemodelan sistem finansial kompleks (Harini & Sari, 2020).

Evolusi teori integral mengalami transformasi mendasar ketika para matematikawan mulai mempertanyakan kemungkinan generalisasi konsep turunan dan integral ke orde yang bukan bilangan bulat. Pertanyaan filosofis yang diajukan Leibniz kepada L'Hôpital pada tahun 1695 mengenai kemungkinan turunan berorde setengah menjadi titik awal lahirnya kalkulus fraksional (Miller & Ross, 1993). Perkembangan selanjutnya menunjukkan bahwa kalkulus fraksional memiliki fondasi teoritis yang kokoh dengan berbagai definisi integral fraksional yang telah dikembangkan, termasuk Riemann-Liouville, Caputo, dan Hadamard (Kilbas, 2006).

Kajian mengenai integral fraksional dari berbagai jenis fungsi telah menjadi topik penelitian yang aktif, dengan aplikasi yang terus berkembang dalam berbagai bidang ilmu terapan (Podlubny, 1998). Aspek teoritis integral fraksional Riemann-Liouville telah dibahas secara mendalam oleh (Johansyah et al., 2017) yang mengeksplorasi sifat-sifat dasarnya. Sementara itu, (Garrappa et al., 2019) melakukan evaluasi komprehensif terhadap integral fraksional fungsi elementer termasuk eksponensial dan trigonometri dengan memanfaatkan fungsi Mittag-Leffler sebagai alat analisis. (Janan & Janan, 2024) membahas tentang fungsi hiperbolik dalam bentuk turunan fraksionalnya dan pada penelitian lainnya (Janan, 2025) membahas fungsi hiperbolik dalam bentuk integral fraksionalnya. Namun, yang dibahas hanya pada fungsi sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik.

Penelitian ini secara khusus mengkaji integral fraksional Riemann-Liouville dari fungsi tangen hiperbolik dan cotangen hiperbolik. Fungsi tangen hiperbolik dan cotangen hiperbolik memiliki karakteristik yang berbeda dari fungsi hiperbolik dasar. Kedua fungsi ini merupakan fungsi rasional yang didefinisikan sebagai rasio antara fungsi sinus dan cosinus hiperbolik. Tangen hiperbolik sering muncul sebagai fungsi aktivasi dalam jaringan saraf tiruan dan model pembelajaran mesin, sementara cotangen hiperbolik memiliki aplikasi dalam teori bilangan dan analisis kompleks. Pemahaman terhadap perilaku integral fraksional kedua fungsi ini dapat membuka wawasan baru dalam pengembangan model-model matematis yang lebih akurat.

Motivasi utama penelitian ini adalah untuk mengisi kesenjangan pengetahuan mengenai representasi analitik integral fraksional fungsi hiperbolik rasional. Dengan menggunakan pendekatan ekspansi deret Maclaurin, penelitian ini mengeksplorasi bagaimana rasio dua deret hiperbolik dapat diintegralkan secara fraksional menggunakan teorema integral fraksional fungsi kuasa. Pendekatan ini memungkinkan derivasi formula eksplisit yang melibatkan fungsi gamma dan dapat diimplementasikan secara numerik. Batasan penelitian ini difokuskan pada integral fraksional Riemann-Liouville dengan batas bawah nol, yang merupakan bentuk paling standar dalam literatur. Orde fraksional dibatasi pada interval $0 < \alpha \leq 1$ untuk menjamin konvergensi deret dan konsistensi dengan interpretasi fisik.

Penelitian ini menggunakan beberapa teorema sebagai berikut:

Teorema 1. Ekspansi deret Maclaurin dinyatakan oleh persamaan (Stewart, 2016):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

dengan $f^{(n)}$ adalah turunan ke-n dari f dan $n!$ adalah faktorial n.

Teorema 2. Jika $f(x) = x^n$, dengan $n \geq 0$, maka integral fraksional dapat dinyatakan dengan:

$$I^\alpha x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)} x^{\alpha+n}$$

Definisi 3. Fungsi gamma $\Gamma(\alpha)$ didefinisikan sebagai (Artin, 2015):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt \qquad (\Re e(\alpha) > 0)$$

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan teorema integral fraksional pada fungsi kuasa yang merupakan salah satu hasil fundamental dalam teori integral fraksional (Samko, 1993)

1. Menentukan integral fraksional dari fungsi tangen hiperbolik menggunakan teorema integral fraksional fungsi kuasa, serta membuat hasil visualnya menggunakan *software* Matlab.

2. Menentukan integral fraksional dari fungsi cotangen hiperbolik menggunakan teorema integral fraksional fungsi kuasa, serta membuat hasil visualnya menggunakan *software* Matlab.

HASIL DAN PEMBAHASAN

a. Integral Fraksional Fungsi Tangen Hiperbolik

Analisis integral fraksional fungsi tangen hiperbolik dimulai dengan memanfaatkan definisi rasio antara fungsi sinus dan cosinus hiperbolik. Secara matematis, proses ini dapat dinyatakan sebagai:

$$I^{\alpha} \tanh t = I^{\alpha}\left(\frac{\sinh t}{\cosh t}\right)$$

Langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan ekspansi deret Maclaurin untuk kedua fungsi hiperbolik. Berdasarkan representasi deret yang telah diketahui, diperoleh:

$$I^{\alpha} \tanh t \ = I^{\alpha}\left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}}\right)$$

Pembagian dua deret ini memerlukan teknik pembagian polinomial yang dilakukan secara simbolik menggunakan software MATLAB. Proses komputasi menghasilkan ekspansi deret tangen hiperbolik hingga term orde kesembilan:

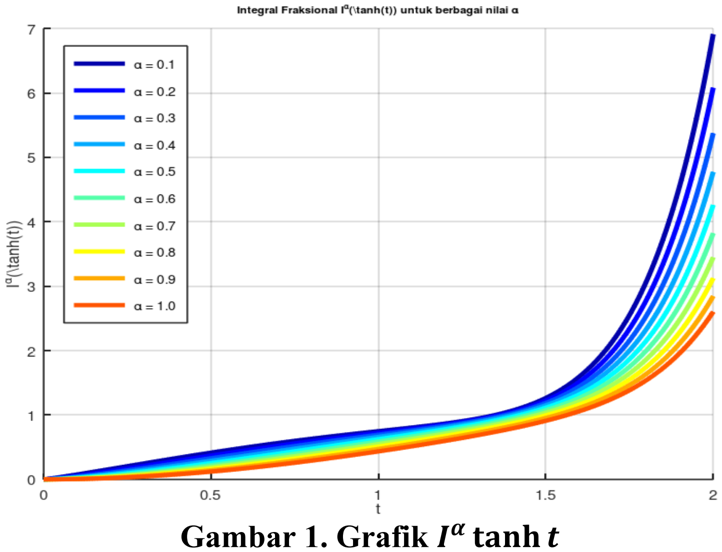
$$I^{\alpha} \tanh t = I^{\alpha}\left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \frac{62}{2835}t^9 - \cdots\right)$$

Setiap suku dalam deret dapat diintegralkan secara terpisah:

$$I^{\alpha} \tanh t = I^{\alpha} t - \frac{1}{3} I^{\alpha} t^3 + \frac{2}{15} I^{\alpha} t^5 - \frac{17}{315} I^{\alpha} t^7 + \frac{62}{2835} I^{\alpha} t^9 - \cdots$$

Penerapan **Teorema 2.** (teorema integral fraksional fungsi kuasa) pada masing-masing suku menghasilkan representasi akhir dalam bentuk fungsi gamma:

$$\begin{aligned} I^{\alpha} \tanh t \ &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - \frac{1}{3}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3} + \frac{2}{15}\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(\alpha+6)} t^{\alpha+5} - \frac{17}{315}\frac{\Gamma(8)}{\Gamma(\alpha+8)} t^{\alpha+7} \\ &+ \frac{62}{2835}\frac{\Gamma(10)}{\Gamma(\alpha+10)} t^{\alpha+9} - \cdots \end{aligned}$$



Gambar 1. Grafik $I^{\alpha} \tanh t$

Gambar 1 menyajikan visualisasi grafis integral fraksional tangen hiperbolik untuk beberapa nilai orde fraksional α. Dari grafik tersebut dapat diobservasi bahwa:

- Untuk $\alpha = 0{,}1 - 0{,}3$ (orde rendah): Kurva menunjukkan pertumbuhan yang sangat lambat dengan kelengkungan yang landai. Fungsi hampir mendekati linear di region awal, mencerminkan dominasi suku $t^{\alpha+1}$.
- Untuk $\alpha = 0{,}4 - 0{,}7$ (orde menengah): Kelengkungan mulai lebih terlihat dengan pertumbuhan yang moderat. Transisi dari perilaku linear ke nonlinear terjadi pada nilai t yang lebih kecil dibanding orde tinggi.
- Untuk $\alpha = 0{,}8 - 1{,}0$ (orde tinggi): Kurva menunjukkan karakteristik yang semakin mendekati integral klasik, dengan pertumbuhan yang lebih cepat dan saturasi yang mulai terlihat untuk nilai t yang lebih besar.

b. Integral Fraksional Fungsi Cotangen Hiperbolik

Pendekatan serupa diterapkan untuk fungsi cotangen hiperbolik dengan membalik rasio fungsi hiperbolik:

$$I^\alpha \coth t = I^\alpha \left(\frac{\cosh t}{\sinh t}\right)$$

Ekspansi deret diperoleh dengan membagi deret Maclaurin cosinus hiperbolik dengan sinus hiperbolik:

$$I^\alpha \coth t = I^\alpha \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}}\right)$$

Pembagian deret menggunakan MATLAB menghasilkan ekspansi yang memuat suku singular:

$$I^\alpha \coth t = I^\alpha \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{3} t - \frac{1}{45} t^3 + \frac{2}{945} t^5 - \frac{1}{4725} t^7 + \cdots\right)$$

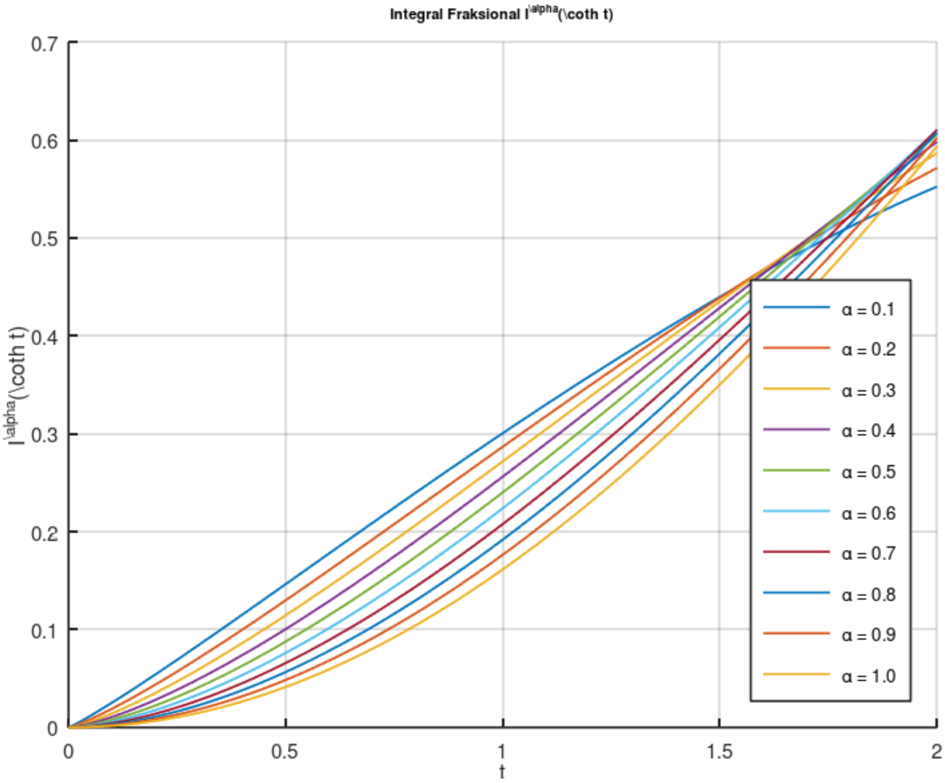
Keberadaan suku $\frac{1}{t}$ merupakan karakteristik esensial dari fungsi cotangen hiperbolik yang memiliki singularitas kutub sederhana di $t = 0$. Hal ini mencerminkan perilaku asimptotik $\coth t \approx \frac{1}{t}$ untuk t mendekati nol. Setiap suku dalam deret dapat diintegralkan secara terpisah:

$$I^\alpha \coth t = I^\alpha \frac{1}{t} + \frac{1}{3} I^\alpha t - \frac{1}{45} I^\alpha t^3 + \frac{2}{945} I^\alpha t^5 - \frac{1}{4725} I^\alpha t^7 + \cdots$$

Penerapan **Teorema 2.** pada suku-suku dengan pangkat positif menghasilkan:

$$I^\alpha \coth t = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - \frac{1}{45} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3} + \frac{2}{945} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(\alpha+6)} t^{\alpha+5} - \frac{1}{4725} \frac{\Gamma(8)}{\Gamma(\alpha+8)} t^{\alpha+7} + \cdots$$

Perlu dicatat bahwa suku $I^\alpha \frac{1}{t}$ tidak disertakan dalam formula akhir karena integral fraksional Riemann-Liouville dengan batas bawah nol untuk fungsi t^{-1} tidak terdefinisi. Dalam praktik numerik, suku ini dapat ditangani dengan menggunakan batas bawah $\varepsilon > 0$ yang sangat kecil (regularisasi) atau melalui interpretasi distribusional.



Gambar 2. Grafik I^{α} coth t

Gambar 2 menyajikan visualisasi grafis integral fraksional cotangen hiperbolik untuk beberapa nilai orde fraksional $0 < \alpha \leq 1$.

PENUTUP

Simpulan

Berdasarkan analisis integral fraksional Riemann-Liouville untuk fungsi tangen dan cotangen hiperbolik dengan orde $0 < \alpha \leq 1$, dapat disimpulkan beberapa hal penting sebagai berikut:

1. Integral fraksional fungsi tangen hiperbolik berhasil diformulasikan dalam bentuk ekspansi deret yang melibatkan fungsi gamma dan pangkat fraksional. Formula yang diperoleh adalah
$$I^{\alpha} \tanh t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - \frac{1}{3}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3} + \frac{2}{15}\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(\alpha+6)} t^{\alpha+5} - \frac{17}{315}\frac{\Gamma(8)}{\Gamma(\alpha+8)} t^{\alpha+7} + \frac{62}{2835}\frac{\Gamma(10)}{\Gamma(\alpha+10)} t^{\alpha+9} - \cdots$$ I
2. Integral fraksional fungsi cotangen hiperbolik memuat komplikasi berupa suku singular t^{-1} yang diperoleh dari perilaku asimptotik fungsi cotangen hiperbolik di sekitar origin. Bagian reguler dari integral dapat diekspresikan sebagai
$$I^{\alpha} \coth t = \frac{1}{3}\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)} t^{\alpha+1} - \frac{1}{45}\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\alpha+4)} t^{\alpha+3} + \frac{2}{945}\frac{\Gamma(6)}{\Gamma(\alpha+6)} t^{\alpha+5} - \frac{1}{4725}\frac{\Gamma(8)}{\Gamma(\alpha+8)} t^{\alpha+7} + \cdots$$
3. Visualisasi numerik menggunakan *software* MATLAB menunjukkan bahwa variasi nilai α secara signifikan mempengaruhi karakteristik pertumbuhan kedua fungsi. Untuk nilai α kecil (mendekati 0), pertumbuhan fungsi berlangsung lebih lambat dengan kelengkungan yang landai, sedangkan untuk α mendekati 1, perilaku fungsi konvergen ke bentuk integral klasik. Hasil visualisasi memvalidasi formula analitik yang telah diturunkan dan menunjukkan konsistensi antara teori dan komputasi.

Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, beberapa saran untuk penelitian lanjutan adalah:

1. Pengembangan formula integral fraksional untuk fungsi hiperbolik rasional lainnya seperti sekan hiperbolik (sech) dan cosekan hiperbolik (csch) yang memiliki karakteristik singularitas berbeda.

2. Perluasan analisis ke orde fraksional $\alpha > 1$ dan studi komparatif dengan definisi integral fraksional lainnya seperti Caputo atau Hadamard untuk memahami perbedaan karakteristik masing-masing pendekatan.

DAFTAR PUSTAKA

Artin, E. (2015). The Gamma Function. *Courier Dover Publications.*

Garrappa, R., Kaslik, E., & Popolizio, M. (2019). Evaluation of Fractional Integrals and Derivatives of Elementary Functions: Overview and Tutorial. *In Mathematics* (Vol. 7, Issue 5). https://doi.org/10.3390/math7050407

Harini, L. P. I., & Sari, K. (2020). Aplikasi Integral dalam Bidang Ekonomi dan Finansial. *E-Jurnal Matematika*, *9*(2). https://doi.org/10.24843/mtk.2020.v09.i02.p291

Janan, S. (2025). Integral Fraksional dari Fungsi Hiperbolik. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *13*(2), 37–42.

Janan, S., & Janan, T. (2024). Fractional Derivative of Hyperbolic Function. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, *21*(1), 267–284.

Johansyah, M. D., Nahar, J., Supriatna, A. K., & Supian, S. (2017). Kajian Dasar Integral dan Turunan Fraksional Riemann-Liouville. *Prosiding Industrial Research Workshop and National Seminar*, *8*, 204–209.

Kilbas, A. A. (2006). Theory and Applications of Fractional Differential Equations. *North-Holland Mathematics Studies*, *204*.

Miller, K. S., & Ross, B. (1993). An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John-Wily and Sons. In *Inc. New York*.

Podlubny, I. (1998). Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications (Vol. 198). *Elsevier.*

Samko, S. G. (1993). Fractional Integrals and Derivatives. *Theory and Applications*.

Stewart, J. (2016). Calculus: Early Transcendentals 8th Edition. *Cengage Learning*.